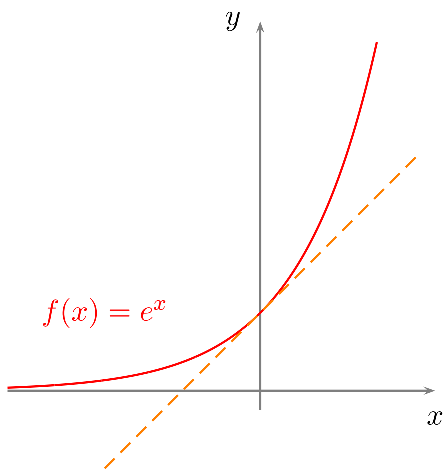
Semestervorkurs A:

Analysis

Benjamin Hildebrandt



Skript zum
AMIV-Semestervorkurs in Analysis
an der ETH Zürich.

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen

1.1 Mathematische Zeichen und Schreibweisen

1.1.1 Summen- und Produktzeichen

Für die Notation von Summen und Produkten gibt es das SUMMENZEICHEN und das PRODUKTZEICHEN. Beide besitzen eine Laufvariable k, die im allgemeinen Term für die Summanden beziehungsweise Faktoren eingesetzt werden kann. Für jeden Wert der Laufvariablen von p bis q ist ein Summand beziehungsweise Faktor zu bilden.

$$\sum_{k=p}^{q} a_k := \begin{cases} 0 & (q < p) \\ a_p + a_{p+1} + \cdots + a_q & (q \geq p) \end{cases}$$

$$\prod_{k=p}^{q} a_k := \begin{cases} 1 & (q < p) \\ a_p \cdot a_{p+1} \cdot \cdots \cdot a_q & (q \geq p) \end{cases}$$

1.1.2 Intervalle

Bei einem INTERVALL unterscheidet man, ob die Grenzen des Intervalls eingeschlossen sind oder nicht. Ein Intervall, das seine Grenzen enthält, heißt ABGESCHLOSSEN; eines, das seine Grenzen nicht enthält dagegen OFFEN. Enthält das Intervall nur eine seiner Grenzen, so nennt man es HALBOFFEN.

Schreibweise	Bedeutung
$[a, b]$	a und b gehören zum Intervall
$(a, b]$	a gehört nicht zum Intervall, b dagegen schon
$[a, b)$	a gehört zum Intervall, b nicht
(a, b)	a und b gehören nicht zum Intervall

1.2 Mengen

1.2.1 Zahlenmengen

Für einige wichtige Zahlenmengen gibt es in der Mathematik eigene Symbole:

Symbol	**Bedeutung**
$\mathbb{N}$	natürliche Zahlen
$\mathbb{Z}$	ganze Zahlen
$\mathbb{Q}$	rationale Zahlen
$\mathbb{R}$	reelle Zahlen
$\mathbb{C}$	komplexe Zahlen
$\mathbb{B}$	Bits

Es gilt: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

1.2.2 Schreibweisen bezüglich Mengen

Um auszudrücken, dass gewisse Elemente zu einer Menge gehören oder eine Menge eine Teilmenge einer anderen Menge ist, verwendet man die folgenden Schreibweisen:

Schreibweise	**Bedeutung**
$x \in A$	x ist ein Element/Punkt der Menge A.
$A \subseteq B$	Die Menge A ist eine Teilmenge der Menge B oder äquivalent.
$A \subset B$	Die Menge A ist eine echte Teilmenge der Menge B.
$\emptyset$ oder $\{\}$	leere Menge

1.2.3 Mengenoperatoren

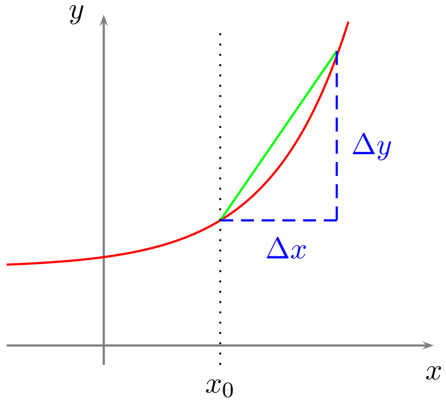
Mengen lassen sich auf mehrere Arten miteinander kombinieren. Die wichtigsten Mengenoperatoren sind diejenigen zur Bildung von Vereinigungsmenge, Durchschnitt und Differenzmenge.

Schreibweise	**Bedeutung**
$A \cup B$	Vereinigungsmenge (A, B sowie A und B zusammen)
$A \cap B$	Durchschnitt (gemeinsamer Teil von A und B)
$A \setminus B$	Differenzmenge (A ohne B)

2 Differentialrechnung

2.1 Steigung und Steigungsdreieck

Betrachtet man eine Funktion $f(x)$ an einer Stelle x_0 und geht von dieser Stelle aus um eine Länge Δx nach rechts, so lassen sich die Punkte des Funktionsgraphen an den Stellen x_0 und $x_0+\Delta x$ (zusammen mit einer vertikalen und einer horizontalen Strecke) zu einem STEIGUNGSDREIECK verbinden.



Mit diesem Steigungsdreieck lässt sich der Anstieg des Funktionswertes im betrachteten Intervall visualisieren. Das Verhältnis der Differenzen der x- und y-Werte bezeichnet man als STEIGUNG m:

$$\text{Steigung } m := \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

2.2 Definition der Ableitung (Differentialquotient)

Der Übergang zum Begriff der Steigung in einem Punkt erfolgt, indem man zunächst ein Steigungsdreieck betrachtet und dieses mittels eines Grenzübergangs beliebig klein werden lässt.

Eine Funktion $f(x)$ heißt dann an der Stelle x_0 DIFFERENZIERBAR, falls der folgende Grenzwert existiert:

$$\text{Ableitung einer Funktion:} \quad f'(x_0) := \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

Man bezeichnet ihn als ERSTE ABLEITUNG der Funktion f an der Stelle x_0. Existiert dieser Grenzwert für alle Punkte eines ganzen Intervalls, so heißt die Funktion auf diesem Intervall differenzierbar. Existiert die Ableitung auf dem ganzen Definitionsbereich der Funktion, so heißt die Funktion differenzierbar.

2.3 Höhere Ableitungen

Durch abermaliges Differenzieren erhält man weitere Ableitungen, falls die jeweils vorangegangene Ableitung ebenfalls differenzierbar ist.

> Eine Funktion heißt m-fach differenzierbar, wenn ihre m-te Ableitung existiert.

2.4 Geometrische Bedeutung der Ableitung

Die Ableitung einer Funktion f an der Stelle x_0 gibt die Steigung der Tangente an den Graphen von f an dieser Stelle an. Der Steigungswinkel α dieser Tangente lässt sich mit Hilfe trigonometrischer Funktionen berechnen:

$$\alpha = \arctan\Big(f'(x_0) \Big)$$

Die zweite Ableitung $f''(x)$ gibt Aufschluss über die KRÜMMUNG einer Kurve:

- Bereiche, in denen $f''(x)$ positiv ist, heißen KONVEX (linksgekrümmt).
  Dort beschreibt der Graph von f eine Linkskurve.
- Bereiche, in denen $f''(x)$ negativ ist, heißen KONKAV (rechtsgekrümmt).
  Dort beschreibt der Graph von f eine Rechtskurve.

2.5 Ableitungen der elementaren Funktionen

Für die Ableitung der elementaren Funktionen gelten die folgenden Ableitungsregeln, die es erlauben, deren Ableitungen schneller und einfacher als mit der Methode der Grenzwertbildung zu berechnen. Sie ergeben sich, indem man die Grenzwertbetrachtung für die allgemeine Form der im folgenden aufgeführten Funktionstypen durchführt.

2.5.1 Potenzfunktionen

Ableitung einer Potenzfunktion: $\left[x^n\right]' = n \cdot x^{n-1}$

Spezialfall Wurzelfunktion: $\left[\sqrt{x}\right]' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

2.5.2 Exponentialfunktionen

Ableitung einer Exponentialfunktion: $\left[a^x\right]' = \ln(a) \cdot a^x$

Spezialfall e-Funktion: $\left[e^x\right]' = e^x$

2.5.3 Logarithmusfunktionen

Ableitung einer Logarithmusfunktion: $\left[\log_a(x)\right]' = \dfrac{1}{\ln(a) \cdot x}$

Spezialfall natürlicher Logarithmus: $\left[\ln(x)\right]' = \dfrac{1}{x}$

2.5.4 Trigonometrische Funktionen

Ableitung der Sinusfunktion: $\left[\sin(x)\right]' = \cos(x)$

Ableitung der Cosinusfunktion: $\left[\cos(x)\right]' = -\sin(x)$

Ableitung der Tangensfunktion: $\left[\tan(x)\right]' = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$

2.6 Differentiationsregeln

2.6.1 Produkte von Funktionen und Konstanten

Beim Differenzieren eines Produkts aus einer Funktion $f(x)$ und einer Konstanten C darf die Konstante aus dem zu differenzierenden Term herausgezogen werden:

Konstante Vorfaktoren beim Ableiten: $\left[C \cdot f(x)\right]' = C \cdot f'(x)$

2.6.2 Summenregel

Eine Funktion $f(x)$, die sich als Summe zweier Funktionen $g(x)$ und $h(x)$ zusammensetzt, darf summandenweise differenziert werden:

Summenregel: $f'(x) = \left[g(x) + h(x)\right]' = g'(x) + h'(x)$

2.6.3 Produktregel und Quotientenregel

Eine Funktion $f(x)$, die sich als Produkt oder Quotient zweier Funktionen $g(x)$ und $h(x)$ zusammensetzt, muss nach einer der beiden folgenden Regeln differenziert werden:

Produktregel: $f'(x) = \left[g(x) \cdot h(x)\right]' = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$

Quotientenregel: $f'(x) = \left[\dfrac{g(x)}{h(x)}\right]' = \dfrac{g'(x) \cdot h(x) - g(x) \cdot h'(x)}{\left[\,h(x)\,\right]^2}$

2.6.4 Kettenregel

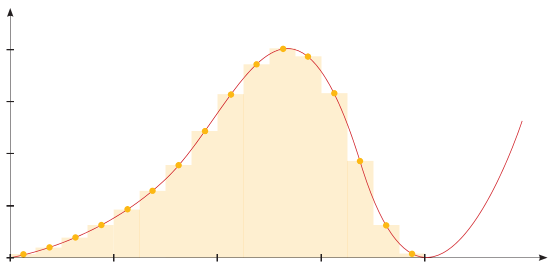
Ist das Argument einer Funktion f nicht die Funktionsvariable x selbst, sondern eine weitere Funktion $g(x)$, so spricht man von einer VERKETTUNG von Funktionen. Hier muss beim Differenzieren die so genannte INNERE ABLEITUNG berücksichtigt werden:

Kettenregel: $(f \circ g)'(x) = \left[f\Big(g(x)\Big)\right]' = f'\Big(g(x)\Big) \cdot g'(x)$

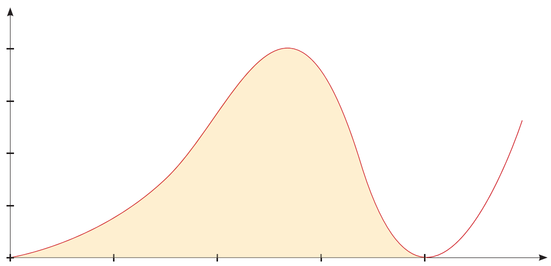
3 Integralrechnung

3.1 Grundidee hinter der Integralrechnung

Die INTEGRALRECHNUNG beschäftigt sich im geometrischen Sinne mit der Berechnung von Flächeninhalten. Möchte man den Flächeninhalt einer Fläche bestimmen, die zwischen dem Graphen einer Funktion und der x-Achse des Koordinatensystems liegt, so verwendet man hierzu die Integralrechnung.



Die Grundidee besteht darin, die zu bestimmende Fläche in Streifen aufzuteilen. Lässt man die Streifenbreite dabei unendlich klein werden, so geht der durch das Aufsummieren der einzelnen Streifen gewonnene Näherungswert in den exakten Flächeninhalt der betrachteten Fläche über.



3.2 Stammfunktionen

Zum Rechnen mit Integralen wird der Begriff der STAMMFUNKTION benötigt:

Eine STAMMFUNKTION einer Funktion $f(x)$ ist eine Funktion $F(x)$, die abgeleitet wieder die Ausgangsfunktion $f(x)$ ergibt.

3.3 Fundamentalsatz der Analysis

Der Fundamentalsatz der Analysis (auch bekannt als Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung) verbindet die Integralrechnung mit der Differentialrechnung und Stammfunktionen. Er besagt, dass der Flächeninhalt unter einer Kurve gleich der Differenz der Werte der Stammfunktionen am Rand des Integrationsgebietes ist:

$$\int_a^b f(x)\,dx \;=\; F(b) - F(a)$$

Hierbei ist es wichtig, sich in Erinnerung zu rufen, wie sich das Integral zusammensetzt: Man summiert Rechtecke auf, deren Breite durch eine Streifenbreite und deren Höhe durch den Funktionswert der zu integrierenden Funktion an der jeweiligen Stelle gegeben ist. Die Streifenbreite ist ein positiver Wert, das bedeutet, dass sich bei negativen Funktionswerten auch negative Teilflächeninhalte ergeben. Daher gilt bei der Integralrechnung:

- Flächenstücke überhalb der x-Achse werden beim Integrieren positiv gezählt.
- Flächenstücke unterhalb der x-Achse werden negativ gezählt.

Ist der rein geometrisch betrachtete Flächeninhalt einer Fläche gesucht, die sich aus Teilstücken unter- und überhalb der x-Achse zusammensetzt, so muss einzeln über die Teilstücke unter- und oberhalb der x-Achse integriert werden. Am Ende können dann die Beträge aller gefundenen Werte addiert werden, um den gesamten Flächeninhalt zu erhalten.

3.4 Bestimmtes und unbestimmtes Integral

Unter einem bestimmten Integral versteht man ein Integral, für das feste Integrationsgrenzen gegeben sind, an denen es ausgewertet werden muss. Ein unbestimmtes Integral besitzt dagegen keine Integrationsgrenzen und entspricht daher einer Stammfunktion des Integranden:

Bestimmtes Integral: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \;=\; F(b) - F(a)$

Unbestimmtes Integral: $\displaystyle\int f(x)\,dx \;=\; F(x)$

3.5 Stammfunktionen der elementaren Funktionen

Im Folgenden sind Stammfunktionen der elementaren Funktionen aufgelistet. Beachte, dass eine beliebige Konstante C hinzuaddiert werden kann, da sie beim Ableiten wieder verschwindet. Aus Gründen der Übersichtlichkeit wurde diese Konstante hier weggelassen.

3.5.1 Potenzfunktionen

Stammfunktion einer Potenzfunktion: $$\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}\cdot x^{n+1}$$

Spezialfall Wurzelfunktion: $$\int \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}\cdot x^{\frac{3}{2}}$$

3.5.2 Exponentialfunktionen

Stammfunktion einer Exponentialfunktion: $$\int a^x\,dx = \frac{1}{\ln(a)}\cdot a^x$$

Spezialfall e-Funktion: $$\int e^x\,dx = e^x$$

3.5.3 Logarithmusfunktionen

Stammfunktion einer Logarithmusfunktion: $$\int \log_a(x)\,dx = \frac{x\cdot\ln(x)-x}{\ln(a)}$$

Spezialfall natürlicher Logarithmus: $$\int \ln(x)\,dx = x\cdot\ln(x)-x$$

3.5.4 Trigonometrische Funktionen

Stammfunktion der Sinusfunktion: $$\int \sin(x)\,dx = -\cos(x)$$

Stammfunktion der Cosinusfunktion: $$\int \cos(x)\,dx = \sin(x)$$

Stammfunktion der Tangensfunktion: $$\int \tan(x)\,dx = -\ln\Big[\,\cos(x)\Big]$$

3.6 Eigenschaften des Integrals

Das bestimmte Integral ist ein LINEARER OPERATOR, was bedeutet, dass es ADDITIV und HOMOGEN ist. Neben der Linearität besitzt es noch einige weitere wichtige Eigenschaften:

$$\begin{aligned}
\text{Additivität:}\quad & \int_a^b \Big[\, f(x) + g(x) \Big]\, dx \;=\; \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx \\
\text{Homogenität:}\quad & \int_a^b \Big[\, \lambda \cdot f(x) \Big]\, dx \;=\; \lambda \cdot \int_a^b f(x)\,dx \\
\text{Grenzabfolge:}\quad & \int_a^b f(x)\,dx \;=\; -\int_b^a f(x)\,dx \\
\text{Aufteilbarkeit:}\quad & \int_a^b f(x)\,dx \;=\; \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx\,, \quad \text{falls } a \le c \le b
\end{aligned}$$

4 Kurvendiskussion

4.1 Motivation

Die Kurvendiskussion ist ein mathematisches Hilfsmittel, um die charakteristischen Merkmale einer Funktion herauszuarbeiten und sich ein Bild von ihr zu verschaffen.

4.2 Vorgehen

4.2.1 Ableitungen

Zunächst bildet man die erste, zweite und dritte Ableitung der zu untersuchenden Funktion, um für spätere Berechnungen einfach auf diese Terme zurückgreifen zu können.

4.2.2 Definitionsbereich

Für die Bestimmung des Definitionsbereichs einer Funktion gilt: Im Allgemeinen ist der Definitionsbereich die Menge der reellen Zahlen ($\mathbb{R}$). Er ist eingeschränkt, falls eines der folgenden Probleme auftritt:

- Division durch Null
- Möglichkeit, negative Argumente bei Wurzelfunktionen zu erhalten
- Möglichkeit, negative Argumente bei Logarithmusfunktionen zu erhalten

4.2.3 Verhalten für $x \to \pm\infty$

Zur Analyse des Verhaltens für $x \to \pm\infty$ bildet man die folgenden beiden Grenzwerte:

Linke Seite: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

Rechte Seite: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

Für den Fall, dass sich ein endlicher Grenzwert ergibt, besitzt die Funktion je eine waagerechte Asymptote auf der Höhe des entsprechenden Grenzwertes.

4.2.4 Verhalten in der Umgebung von Definitionslücken

An einer Definitionslücke besitzt eine Funktion im Allgemeinen einen Pol. Strebt der Funktionswert von beiden Seiten aus gegen $+\infty$ oder $-\infty$, so spricht man von einer Polstelle ohne Vorzeichenwechsel. Strebt der Funktionswert von beiden Seiten in unterschiedliche Richtungen, liegt eine Polstelle mit Vorzeichenwechsel vor. Ergibt sich dagegen von beiden Seiten derselbe endliche Grenzwert, so handelt es sich um eine hebbare Definitionslücke.

> Zur Unterscheidung bildet man den links- und rechtsseitigen Grenzwert an der Stelle der jeweiligen Definitionslücke.

4.2.5 Achsenschnittpunkte (Nullstellen und Schnittpunkt mit der y-Achse)

Um die Nullstellen einer Funktion zu bestimmen, setzt man ihren Funktionsterm gleich Null. Die Lösungen der entstehenden Gleichung sind die gesuchten Nullstellen. Für jede Lösung x_i hat die entsprechende Nullstelle die Koordinaten $(\,x_i \,|\, 0\,)$.

Den Schnittpunkt mit der y-Achse bestimmt man, indem man $x = 0$ in den Funktionsterm einsetzt. Man erhält dann einen y-Wert und der gesuchte Punkt hat die Koordinaten $(\,0 \,|\, y\,)$.

4.2.6 Extremalstellen

Um mögliche Extremalstellen einer Funktion zu finden, geht man wie folgt vor:

> 1. Man setzt die erste Ableitung gleich Null. Die Lösungen der so entstandenen Gleichung sind die x-Werte der so genannten kritischen Punkte. Dies sind diejenigen Punkte, welche für Extremalstellen überhaupt in Frage kommen.
> 2. Nun setzt man die x-Werte der gefundenen kritischen Punkte in die zweite Ableitung ein. Dann kann wie folgt unterschieden werden, je nachdem, ob das Ergebnis kleiner, gleich oder größer Null ist:
>   - $f''(x) < 0 \quad \Longrightarrow$ Es liegt ein Maximum vor.
>   - $f''(x) = 0 \quad \Longrightarrow$ Es liegt ein Sattelpunkt vor.
>   - $f''(x) > 0 \quad \Longrightarrow$ Es liegt ein Minimum vor.
> 3. Zum Schluss berechnet man für die gefundenen Extremstellen die zugehörigen y-Werte, indem man die gefundenen x-Werte einfach in den Funktionsterm, also in $f(x)$, einsetzt.

4.2.7 Wendestellen

Zur Bestimmung etwaiger WENDESTELLEN ist das Vorgehen ähnlich wie bei der Bestimmung von Extremalstellen:

1. Man setzt die zweite Ableitung gleich Null. Die Lösungen der so entstandenen Gleichung sind x-Werte derjenigen Punkte, die als Wendestellen überhaupt in Frage kommen.
2. Nun setzt man die x-Werte der so gefundenen Punkte in die dritte Ableitung ein. Dann kann wie folgt unterschieden werden, je nachdem, ob das Ergebnis kleiner, gleich oder größer Null ist:
   - $f'''(x) < 0 \implies$ Es liegt eine Wendestelle vor (Links-Rechts).
   - $f'''(x) = 0 \implies$ Es kann keine Aussage getroffen werden.
   - $f'''(x) > 0 \implies$ Es liegt eine Wendestelle vor (Rechts-Links).
3. Zum Schluss berechnet man für die gefundenen Wendestellen die zugehörigen y-Werte, indem man die gefundenen x-Werte einfach in den Funktionsterm, also in $f(x)$, einsetzt.

4.2.8 Skizze

Zum Schluss SKIZZIERT man den Graphen mit allen gefundenen Informationen.